Wenn das kleine Wörtchen „Wenn“ nicht wäre – Zum Jahr der Mathematik 2008; Teil II

3. Oktober 2008

In diesem zweiten Teil dieses Aufsatzes zum Jahr der Mathematik betrachten wir Beispiele dafür, dass wir Mathematik zu lieben scheinen; die Statistik und unserem Eifer, alles messen zu wollen. Wir gehen dazu auf die Prognose von Wahlen ein und erläutern wie diese funktionieren. Allerdings werden auch Beispiele genannt, in denen die mathematische Methode die eigenen Annahmen zu hinterfragen nicht genügend angewendet wird. Auf diese Weise entstehen einerseits unterhaltsame Beiträge in Zeitungen und Fernsehen wie am Beispiel der Prognose von Fußballergebnissen demonstriert wird. Auf der anderen Seite kann dies aber auch zu schwerwiegenderen Fehlern führen, was wir am Beispiel der Finanzkrise und der Mathematik der Finanzmärkte ausführen werden.

Von Patrick Grete

Alles muss messbar sein -- Beispiel Statistik

Nähern wir uns nun Bereichen, wo viele von uns die Mathematik zu lieben scheinen. Dies ist immer dann der Fall, wenn quantitative Aussagen gefragt sind. Etwa bei dem Ausgang einer Wahl. Da interessiert uns nicht nur, dass eine Partei mehr Stimmen als eine andere bekommen hat, sondern es interessiert uns "wie viel mehr?". Da könnte man einfach zählen und die Zahlen nennen. Aber das reicht meistens nicht, denn vielleicht gab es dieses Mal insgesamt mehr Wähler als vorher. Deshalb hat man einen Bruch bzw. ein Verhältnis, also eine Prozentangabe zum entscheidenden Maß gemacht. Nicht nur in der Politik, auch in Wirtschaft und Wissenschaft bildet man solche Verhältnisse, um etwa den Forschungsoutput oder die Anzahl abgelehnter Erstattungsanträge zu messen. Natürlich ist hinlänglich bekannt, dass diese Zahlen nur zum Teil dem Objektivitätsanspruch gerecht werden können. Wir kennen dieses Phänomen bei der Arbeitslosenstatistik hier in Deutschland, wo man regelmäßig neu definiert, wer in der Statistik auftauchen soll und wer nicht (z.B. sind Menschen, die gerade fortgebildet werden nicht "arbeitssuchend"). Entsprechend müsste sich eigentlich die Interpretation der Arbeitslosenquote damit auch ständig ändern. Dies wird allerdings selten gemacht, denn dann bräuchte man die Neudefinitionen gar nicht durchzuführen. Man könnte hier vermuten, dass die Ausnutzung der mathematischen Unkenntnis der Mehrzahl der wählenden Bürger ausgenutzt wird und hier mit mathematischen Größen eine Objektivität nur vorgetäuscht wird.

Die Diskussion dieses Punktes ist sicherlich interessant, allerdings führt uns dieser Punkt zu weit in politische Fahrwasser, was den mathematischen Aspekt zu sehr verschleiern würde. Aber bleiben wir bei der Statistik. Statistik kann nämlich nicht nur beschreiben, sondern sie wird auch benutzt, um Ereignisse mit einiger Wahrscheinlichkeit vorherzusagen. Betrachten wir dazu zwei Beispiele:

Vorhersage von Wahlausgängen

Wahlzeit ist die Zeit der Wahlvorhersagen. Wie funktioniert so etwas? Ist das nicht so etwas wie der Blick in die Kristallkugel? Versuchen wir einen Zugang zu gewinnen. Angenommen es ist Wahltag und 99 von 100 Wahlkreisen sind schon ausgezählt, dann können nicht mehr beliebige Ergebnisse herauskommen, es kann nur noch eine kleine Änderung zum Ergebnis aus 99 Wahlkreisen stattfinden. Wir sehen also, dass man durch Befragung einer Teilmenge der Wählerschaft gewisse Informationen, aber eben keine vollständigen Informationen erhalten kann. An der Existenz eines Mittelwertes (der Wahlausgang) besteht hingegen kein Zweifel. Wenn es einen Mittelwert gibt, dann kann man mittels Stichproben eine Schätzung auf diesen Mittelwert erhalten. Diese Schätzung hat allerdings nur eine gewisse Güte, je nach Größe der Stichprobe.

Wir sehen hier wieder die Wenn-Dann-Struktur. Es ist vernünftig die Existenz einer Wahlentscheidung vorauszusetzen. Dann kann man mit den Methoden der Statistik ein Ergebnis schätzen und die Güte dieses Ergebnisses angeben. Ganz so einfach ist es nicht: Der mathematisch gebildete Leser wird bemängeln, dass wir noch etwas über die Verteilungsfunktion wissen müssen, die man meist als Gaußverteilung (Normalverteilung) voraussetzt. Dies ist kein unwichtiger Punkt und in der Tat gründet sich die Angabe der Güte auf die Normalverteilung. Es gibt natürlich noch andere Verteilungen, allerdings streben im Grenzfall großer Anzahlen (viele Millionen Wähler in Deutschland) die meisten Verteilungen gegen die Normalverteilung, daher nimmt man sie als Verteilung an.

Wir sehen also, dass die Schlüsse aus solchen Prognosen auf mathematisch tragfähigen Füßen ruht. Natürlich muss man seine Stichprobe groß genug wählen und die Zusammensetzung der Stichprobe muss auch repräsentativ sein (Geschlechter-, Alters-, Einkommensverteilung etc.). Wenn dies alles gegeben ist und wenn es wirklich so ist, dass es einen Wählerwillen gibt, dann kann man damit Aussagen für unsere Realität machen. Ohne diese "Wenns" geht es nicht.

Prognosen von Fußballergebnissen

Das Jahr 2008 ist nicht nur das Jahr der Mathematik, es fand auch die Fussball- Europameisterschaft der Männer darin statt. Auch im Fußball findet eine immer umfangreichere Metrisierung statt.

Da wird gemessen, wie viel Kilometer ein Spieler gelaufen ist, wie viel Ballbesitz eine Mannschaft hat und wie viele Ecken, Freistöße etc. sie bekommen hat. Aber es wird nicht nur innerhalb eines Spieles metrisiert, sondern wir erfahren auch Mittelwerte über Dekaden hinweg. Da wird analysiert wie oft eine Mannschaft in den letzten Jahren (wenn nicht Jahrzehnten) nicht schon gegen eine andere Mannschaft an einem gewissen Ort verloren oder gewonnen hat, wann das letzte Mal der Titel an das Land XY ging. Es ist natürlich nichts Falsches daran diese Zahlen zu bilden, aber was wird dann mit den Zahlen gemacht?

Sie werden dazu verwendet, um Prognosen für die Zukunft zu machen. "Wenn in den letzten 20 Jahren die Mannschaft A gegen B im Stadion XY verloren hat, dann hat sie für das nächste Spiel schlechte Chancen.", bekommen wir zu hören. Da der Pokal schon seit 40 Jahren nicht mehr nach Spanien ging, haben sie auch 2008 schlechte Chancen dafür... Eine offenbar falsche Aussage. "Aber", so bekommen wir zu hören, "das sind ja alles nur statistische Aussagen, die mit Wahrscheinlichkeit aber nicht mit Sicherheit gelten". Mit dem oben dargestellten Vorwissen, sollten solche Aussagen nicht nur mathematisch gebildeten Menschen die Haare sträuben:

Wir wissen ja inzwischen, dass die Mathematik mit Wenn-Dann-Aussagen arbeitet. Schauen wir uns also die Voraussetzungen in diesem Fall an. Ist es z.B. vernünftig davon auszugehen, dass ein Zusammenhang zwischen Spielergebnissen einer Mannschaft über Dekaden hinweg existiert? Ist dies nicht abwegig, nicht zuletzt deshalb, weil sich sowohl Spieler, wie Regeln (Stichwort: Abseits), als auch Taktik und Strategie geändert haben? Was könnte uns dazu bringen zu glauben, dass der Erfolg einer Mannschaft mit dem Ort des Stadions zusammenhängt? Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, dann sind auch die Prognosen Unsinn, auch wenn dort nach mathematischen Formeln und Gesetzen "harte Zahlen" herauskommen.

Was wäre eigentlich, wenn man diese Voraussetzungen ernst nimmt und zu Ende denkt? Man müsste annehmen, dass das Ergebnis eines Fußballspiels eine zufällige Größe ist, da Statistik nur Aussagen über zufällige Größen macht. Es würde demnach keinen Unterschied machen, ob gespielt würde, oder ob man würfelt oder irgendeinen anderen Zufallsprozess laufen ließe. Teamchefs geben bisweilen Millionen für neue Spieler aus... Das wäre demnach eine riesige Verschwendung. Die gleichen Kommentatoren, die uns die Prognosen präsentierten widersprechen dieser Annahme, da sie ja nach dem Spiel die Taktik und die Fitness einzelner Spieler analysieren und bewerten. Es ist also kein Zufallsprozess, also sind auch die Prognosen Unsinn, die dies als Grundlage haben.

Es wird hier also ein mathematisches Werkzeug ohne Reflexion der Voraussetzungen angewendet. Das ist wirklich nicht viel besser, als der Blick in die Kristallkugel, aber vielleicht sollte man an dieser

Stelle nachsichtiger sein. Man könnte die entsprechenden Aussagen der Moderatoren ja als Unterhaltungsprogramm abtun, das eben nicht auf mathematisch fundierte Vorhersagen abzielt. Dann wiederum könnte man zum Schluss gelangen, dass hier Mathematik zur Unterhaltung dient, was eine Vorliebe für Mathematik offen legen würde. Dafür allerdings leben die Sprecher im Fernsehen ihre Rolle zu gut und ohne ironischen Witz, der hier angebracht wäre.

Gehen wir daher zu einem Fall über, der eindeutiger zeigt, dass hier auf der mathematischen Ebene etwas nicht verstanden wurde: Die Finanzkrise.

Mathematisches zur Finanzkrise

Es ist fast unnötig zu erwähnen, dass hier natürlich nicht die Subprimekrise vollständig erklärt und analysiert werden kann. Der geneigte Leser sei an den wirklich guten Wikipedia-Artikel [5] (dort sind auch Artikel von Solon-line verlinkt) verwiesen. Hier soll es mehr um einen mathematischen Aspekt gehen, genauer um die Mathematik der Finanzmärkte.

Dies ist ein eigenes Teilgebiet der Mathematik und es gibt sogar eigene Hochschulen (z.B. die Frankfurt School of Finance and Management), die sich auf Finanzmathematik und verwandte Themen spezialisiert haben, was zeigt, wie komplex und umfangreich diese ganze Thematik ist. Das soll hier aber nicht weiter stören, da der offen zu legende Punkt recht simpel ist. Bevor wir dazu kommen, versuchen wir einen Zugang zum Thema zu bekommen.

An den Finanzmärkten werden Finanzprodukte gehandelt, wie z.B. Aktien, Optionen und Derivate. Stellen wir uns beispielsweise vor, wir seien ein Autoteilehersteller und wir wären von den Stahlpreisen abhängig. Diese sind ständigen Schwankungen unterworfen. Also wollen wir uns dagegen absichern und schließen mit einem Vertragspartner ein Abkommen, dass wir unseren Stahl bei der nächsten Lieferung in 3 Monaten zu einem heute fest zu legenden Preis kaufen können. Man nennt so ein Abkommen eine "Option", weil man nach der vereinbarten Zeit die Möglichkeit (engl. option) hat, ein Gut zu einem festen Preis zu kaufen. Man muss dieses Recht nicht ausüben, da der Preis ja auch gefallen sein kann. Damit uns unser Vertragspartner dieses Risiko abnimmt, müssen wir uns auf eine Aufwandsentschädigung einigen; auf einen Preis. Die scheinbar simple Frage lautet nun: Was ist ein fairer Preis für dieses Abkommen?

Dazu stellen wir fest, dass wir zwar mutmaßen können, welcher Preis der Stahl nach der festgelegten Zeit hat, dies aber nicht vorher wissen und wohl auch nicht wissen können. Dies liegt daran, dass wir nicht alle Faktoren und auch nicht die Wirkung dieser Faktoren auf den Stahlpreis kennen. Man könnte meinen, dass der Preis eine Zufallsgröße ist und es gibt einige Untersuchungen zum Preisverlauf auf kurzen Zeitskalen, die diese These stützen [6]. Dann können wir versuchen ein statistisches Modell zu erstellen und stehen vor folgendem mathematischem Problem: Der Endpreis hängt offenbar vom Preisverlauf während des Vertragszeitraums ab, wobei während dieser Zeit die einzelnen Preissprünge zufällig sind. Wenn Sie das nicht verstehen, ist das kein Wunder; selbst ein Mathematikstudent lernt nicht die dazu nötigen mathematischen Hilfsmittel. Man nennt diesen Bereich "stochastische Differentialrechnung", ein recht junger Bereich in dem der japanische Mathematiker Itô (1944 & 1946) grundlegende Arbeiten verfasst hat. Der geneigte Leser möge mit dem Wikipedia-Artikel [7] zu diesem Thema beginnen. Es existieren unzählige Bücher zu diesem Thema. Einige sind unter [8] aufgeführt.

Wenn wir also in dieses Thema nicht einsteigen können, so können wir doch einige Plausibilitätsbetrachtungen machen. Ist es z.B. immer korrekt anzunehmen, dass die Preisentwicklung eines Guts zufällig verläuft? Offenbar nicht: Gerade in Zeiten, wo "der Markt" stark in Bewegung ist (in Zeiten der Krise geht:s nach unten; in Zeiten des Booms geht:s nach oben) ist dies nicht erfüllt. Mathematiker haben dies formalisiert und die "normalen Zeiten" des Marktes durch so genannte "Brown'sche Prozesse" charakterisiert. Das hört sich nicht nur physikalisch an, sondern ist auch durch die Physik inspiriert. Der Botaniker Robert Brown hat 1827 festgestellt, dass kleine Schwebeteilchen in Flüssigkeiten eine völlig zufällige Bewegungen ausführen. Dies passiert nicht immer: Wenn man das Wasser z.B. erwärmt, dann gibt es recht regelmäßige Umwälzungsbewegungen (Konvektion). Kurzum, es müssen für die zufällige Bewegung der Teilchen die Bedingungen des Gleichgewichts vorliegen. Temperatur und Wärmemenge dürfen sich nur langsam ändern. Man darf dem System nur in geringen Mengen Wärme zuführen, da sich ansonsten ein Nichtgleichgewicht bildet und damit die Erwartungen und Vorhersagen der Physik des Gleichgewichts nicht erfüllt werden. Da die gesamte stochastische Analysis nach Itô auf die "brown'schen Prozesse" basiert, sind alle Modelle und Ergebnisse nur unter der Voraussetzung eines normalen Marktes (kein Boom, keine Krise) gültig.

Wir sehen hier wieder die typische Wenn-Dann-Struktur. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, gelten die Modelle und man kann korrekte Ergebnisse einer Risiko- oder Preisanalyse, etwa für solche Finanzprodukte wie die obige Option, erwarten. Wenn nicht, dann eben nicht, auch wenn wenn man aus den erstellten Computerprogrammen weiterhin "harte Zahlen" erhält.

Ein Auslöser der Subprime-Krise (und damit zur Finanzkrise) war, dass Menschen Kredite angeboten, obwohl sie eigentlich nicht über die nötigen Sicherheiten verfügten. Da die Banken diese Risiken nicht auf sich nehmen wollten, haben sie sie (sehr vereinfacht ausgedrückt) in kleine Päckchen verpackt und global verteilt. Die Modelle basieren auf der Annahme, dass sich die Preise zufällig entwickeln und dass mit gewisser Wahrscheinlichkeit einige Leute ihre Kredite nicht zurückzahlen werden. Dies kann man alles berücksichtigen und alles zusammen führt zu einer Zahl, nämlich den Marktwert dieser verbrieften Schulden. So lange man diese Modelle benutzt werden Zahlen herauskommen. Bloß weil das alles sehr anspruchsvolle Mathematik ist, heißt das aber nicht, dass sie die absolute (also von Voraussetzungen unabhängige) Wahrheit verkörpert. Denn was ist, wenn ganz viele Menschen ihre Schulden nicht begleichen können und die entsprechenden verbrieften Schuldenpapiere damit wertlos werden? Was ist, wenn diese Schulden und die entsprechenden Papiere nicht mehr nur einer kleinen Zugabe von Wärme ans Wärmebad entsprechen? Dann bildet sich ein Nichtgleichgewicht aus und die Gesetze des Gleichgewichts gelten nicht mehr. Mathematik besitzt die grundsätzliche Wenn-Dann-Struktur; alle Ergebnisse sind nur unter den gegebenen Voraussetzungen (hier: die Bedingungen des Gleichgewichts) wahr.

Anschaulich gesprochen wurde die Idealisierung eines unendlich großen Wärmebades (der Finanzmarkt) zu wenig hinterfragt, denn nur bei einem unendlich großen Wärmebad kann man in kleinen Mengen Wärme (hier die Schulden) ohne Auswirkungen zuführen. Da jedes reale Wärmebad (jeder reale Markt) endlich ist, wirkt sich die Wärmezufuhr irgendwann aus. Das versteht am Beispiel eines Wasserglases, wo einzelne Tropfen heißes Wasser die Temperatur nicht ändern, größere Mengen aber schon, jedes Kind in der Grundschule. Bei der Subprimekrise wurde dies lange nicht verstanden bzw. hat man nichts dagegen getan. Wenn die entsprechenden Verantwortlichen das Wesentliche der Mathematik (nämlich die Wenn-Dann-Struktur) verstanden hätten (bzw. diese Zweifel nicht dem Profitdenken nachgeordnet hätten), gäbe es diese Subprimekrise [9] (und die darauf folgende Finanzkrise) nicht in der vorliegenden Form. Sie hätten hätten nicht den Modellen blind geglaubt, sondern hätten verstanden, dass die "harten Zahlen" auf Annahmen basieren und diese Zahlen nur unter gewissen Voraussetzungen gültig sind.

Natürlich ist die Subprimekrise viel viel komplizierter, aber meine Hypothese ist, dass bei der Bewertung der entsprechenden Papiere, die dahinter liegenden Modelle und deren Annahmen nicht genügend hinterfragt wurden und daher nicht früh genug die Notbremse gezogen wurde (und dass das Profitdenken eventuelle Zweifel übertönt hat). Vielleicht können wir in einigen Jahren diese These in nüchterner Rückschau überprüfen.

Zusammenfassend sehen wir nun, dass die Frage "Mögen wir Mathematik" nicht so eindeutig beantwortet werden kann. Wir haben ja lediglich einen kleinen Streifzug unternommen und sowohl Beispiele für dafür wie dagegen gesehen. Viel wichtiger aber als diese Frage eindeutig oder erschöpfend zu beantworten ist, dass wir gesehen haben, wie wichtig es ist, Mathematik und die mathematische Methode zu verstehen, da es andernfalls sehr teuer werden kann (Subprimekrise) oder man verschaukelt wird, weil man an "harte Zahlen" glaubt (z.B. Arbeitslosenstatistiken), ohne zu verstehen, wie sie zustande kommen.

wird fortgesetzt

Zitate und Anmerkungen

[5] Englischer Wikipedia-Artikel zur Subprimekrise (LINK); Einschätzung über die kommende Rezession in Amerika von Michael Liebig aus März 2007 (LINK); Artikel von Thorsten Schulte bei Solon-line vor dem Ausbruch der Subprimekrise (LINK); Überblicksartikel von Michael Liebig von August 2007 (LINK); Artikel von Dr. R. Hildebrandt zur Finanzkrise aus Juni 2008 (LINK)

[6] Ein quantitative Analyse einiger Aktiendaten, die dies untermauern findet sich im Buch von Fred Espen Benth, "Option theory with stochstic analysis", 2004 Springer-Verlag

[7] Wikipedia-Artikel zum Itô-Integral (LINK);
und das Buch von Thomas Deck, "Der Itô-Kalkül"

[8] John Hull, "Options, Futures and other derivatives" 3. Aufl. 1997; Hans Föllmer, Alexander Schied "Stochastic finance"; Fred Espen Benth, "Option theory with stochstic analysis", 2004 Springer-Verlag

[9] Hier soll gar nicht so getan werden, als wenn diese Krise von den Bänkern alleine verursacht worden wäre. Die Schuldenproduktion war ja politisch gewollt, was sich an niedrigen Zinsen uns steigenden Hauspreisen zeigte. Gerade mathematisch nicht so gebildete Ökonomen hätten voraussehen können, dass sie da eine Blase produzieren, aber vielleicht ließen sie sich auch von den hochkomplexen Finanzprodukten blenden und dachten oder hofften, dass alles gut gehen würde. Wie gesagt: Die Krise ist sehr kompliziert.